CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A XII-A

1. Dacă două lentile au distanțe focale f_1, respectiv f_2 și le punem la o distanță $d>0$ una față de cealaltă, cuplul astfel realizat va funcționa ca o nouă lentilă cu distanța focală f dată de legea $f=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$.

a) Notând $f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$, să se arate că ”$\circ$” este lege de compoziție pe mulțimea $D=[d;+\infty)$.

b) Să se arate că funcția $\varphi:[d;+\infty)\to[0;+\infty)$, $\varphi(f)=1-\dfrac{d}{f}$ are proprietatea $\varphi(f_1\circ f_2)=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)$, pentru orice $f_1, f_2\in[d;+\infty)$.

c) Să se arate că $(D;\circ)$ este structură asociativă.

d) Să se arate că pentru orice $f\in D$ și $n\in\mathbb{N}^*$, $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}=\dfrac{d\cdot f^n}{f^n-(f-d)^n}$ și să se determine f în situația în care există $n\in\mathbb{N}^*$ lentile identice și cu distanța focală f, care funcționează ca o lentilă cu distanța focală $2d$.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) Pentru orice $f_1, f_2\geq d \Rightarrow f_1+f_2-d\geq d>0$ și atunci

$\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}-d=\dfrac{f_1\cdot f_2-df_1-df_2+d^2}{f_1+f_2-d}=\dfrac{(d-f_1)(d-f_2)}{f_1+f_2-d}\geq 0 \Rightarrow f_1\circ f_2\geq d$, deci ”$\circ$” este lege de compoziție pe mulțimea $D=[d;+\infty)$.

b) $\varphi(f_1\circ f_2)=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2) \Leftrightarrow 1-\dfrac{d}{f_1\circ f_2}=\left(1-\dfrac{d}{f_1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{d}{f_1}\right) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$

c) $\varphi(f_1\circ f_2)=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi((f_1\circ f_2)\circ f_3)=\ldots=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)\cdot\varphi(f_3)$ și $\varphi(f_1\circ(f_2\circ f_3))=\ldots=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)\cdot\varphi(f_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (f_1\circ f_2)\circ f_3=f_1\circ(f_2\circ f_3)$ și $1-\dfrac{d}{f_1\circ f_2\circ f_3}=\left(1-\dfrac{d}{f_1}\right)\left(1-\dfrac{d}{f_2}\right)\left(1-\dfrac{d}{f_3}\right)$

d) Inductiv, $1-\dfrac{d}{\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}}=\left(1-\dfrac{d}{f}\right)^n \Rightarrow \underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}=\dfrac{d\cdot f^n}{f^n-(f-d)^n}$ și $\dfrac{d\cdot f^n}{f^n-(f-d)^n}=2d$, etc.

<u>BAREM</u>:

a) Arată că ”$\circ$” este lege de compoziție pe $D=[d;+\infty)$ 2p

b) Arată $\varphi(f_1\circ f_2)=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)$ 1p

c) Demonstrează asociativitatea 2p

d) Demonstrează $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}=\dfrac{d\cdot f^n}{f^n-(f-d)^n}$ 1p

Determină f pentru care $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}=2d$ 1p

2. Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t=0$, 100 de bacterii. S-a constatat că, pentru orice $t>0$, funcția $n:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$, definită prin $n(t)=$ *numărul bacteriilor din vas la momentul* t, verifică relația $n'(t)=0,25\cdot n(t)$, unde n' este derivata funcției $n=n(t)$.

a) Determinați funcția n cu această proprietate.

b) Arătați că $e^x \geq x+1$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ și utilizând eventual acest rezultat, demonstrați că numărul bacteriilor din vas la momentul $t=77$ depășește 2015.

SOLUȚIE:

a) $\dfrac{n'(t)}{n(t)}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \ln n(t)=\dfrac{1}{4}t+c \Rightarrow n(t)=e^{\frac{1}{4}t+c}$ dar $n(0)=100=e^c \Rightarrow n(t)=100\cdot e^{\frac{1}{4}t}$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1 \Rightarrow f'(x)=e^x-1 \Rightarrow f$ are punct de minim $x=0$ cu $f(0)=0$

și folosind $e^x\geq x+1 \Rightarrow n(77)=100\cdot e^{\frac{77}{4}}>100\cdot\left(\dfrac{77}{4}+1\right)=100\cdot\dfrac{81}{4}=81\cdot 25 \Rightarrow n(77)>2025>2015$.

BAREM:

a) $\dfrac{n'(t)}{n(t)}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \ln n(t)=\dfrac{1}{4}t+c \Rightarrow n(t)=e^{\frac{1}{4}t+c}\cdot e^c=e^{\frac{1}{4}t}\cdot k$ ……………………………………………2p

dar $n(0)=100=e^c \Rightarrow n(t)=100\cdot e^{\frac{1}{4}t}$ ………………………………………………………… 1p

b) Demonstrează $e^x\geq x+1$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ …………………………………………………………. 2p

$n(77)=100\cdot e^{\frac{77}{4}}$ ………………………………………………………………………………. 1p

$n(77)\geq 100\cdot\left(\dfrac{77}{4}+1\right)=100\cdot\dfrac{81}{4}=81\cdot 25 \Rightarrow n(77)\geq 2025>2015$ …………………………………... 1p

3. Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă, astfel încât $f(1)=0$ și $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{3}$.

a) Arătați că $\int_0^1 \left(2xf'(x)-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$.

b) Demonstrați că $\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\geq\frac{1}{3}$.

c) Determinați funcția f pentru care avem egalitate în relația demonstrată la punctul b).

<u>SOLUȚIE</u>:

a) Cum $\int_0^1 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1\left(2xf'(x)-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$

b) Folosind punctul anterior, $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2 dx\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow\int_0^1\left(f'(x)\right)^2 dx\geq\int_0^1\left(2xf'(x)-x^2\right)dx\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left(f'(x)-x\right)^2 dx\geq 0$ care este adevărată.

c) Deoarece f' este continuă și $\left(f'(x)-x\right)^2\geq 0$, $(\forall)\ x\in[0;1]$ rezultă, pentru a avea egalitatea, este necesar ca $f'(x)=x$, deci $f(x)=\frac{x^2}{2}+c$.

Impunând condițiile date rezultă $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{2}$.

<u>BAREM</u>:

a) Cum $\int_0^1 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$ 2p

$\Rightarrow\int_0^1\left(2xf'(x)-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$ 1p

b) $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2 dx\geq\int_0^1\left(2xf'(x)-x^2\right)dx$ 1p

$\int_0^1\left(f'(x)-x\right)^2 dx\geq 0$ adevărată... 1p

c) Deduce $f'(x)=x$ 1p

$f(x)=\frac{x^2}{2}+c$, rezultă $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{2}$ 1p

4. Pe o tablă sunt scrise mai multe numere, printre care și numerele 2013, 2014, 2015, 2016, 2017. Un elev șterge, la întâmplare, două dintre numerele scrise și dacă numerele șterse sunt a și b, în locul unuia dintre ele scrie numărul $a*b=ab-2015(a+b)+2015\cdot 2016$. Se cere:

a) Verificaţi $a*b=(a-2015)(b-2015)+2015$.

b) Aflaţi ultimul număr scris pe tablă în situaţia în care elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur număr.

<u>SOLUȚIE</u>:

a) $(a-2015)(b-2015)+2015=ab-2015a-2015b+2015^2+2015=ab-2015(a+b)+2015\cdot 2016=a*b$

b) Efectuând operațiile date, cum de fiecare dată pe tablă rămâne cu un număr mai puțin și numerele scrise sunt în număr finit, la un moment dat apare o operație $a*2015$ dar $a*2015=2015$. Deci 2015 nu poate să dispară de pe tablă, ceea ce înseamnă că ultimul număr rămas pe tablă este 2015.

<u>BAREM</u>:

a) Verifică $a*b=(a-2015)(b-2015)+2015$ ………………………………………………………. 2p

b) Observă că numărul numerelor scrise pe tablă scade cu câte o unitate de fiecare dată când se șterg două numere a și b și se scrie rezultatul operației $a*b$ ………………………………………………… 1p
Observă $a*2015=2015$ ………………………………………………………………………. 2p
și cum numerele scrise pe tablă sunt în număr finit ………………………………………………… 1p
ultimul număr rămas pe tablă este 2015. ………………………………………………………………….. 1p